Оценка способов взаимодействия отделов головного мозга на основе данных электроэнцефалограммы

С.В. Борзунов, e-mail: sborzunov@gmail.com
Я.А. Туровский, email: yaroslav_turovsk@mail.ru
Е.А. Киселев

ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет

Аннотация. *В работе рассматриваются применение методов корреляционного анализа зашумленных сигналов для решения задачи выявления взаимодействия отделов головного мозга и, как следствие, получения возможности построения нейронных сетей мозга.*

Ключевые слова: *корреляция, белый шум, корреляционный анализ, электроэнцефалограмма.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-29-01156_мк.

Введение

В настоящее время значительный интерес представляют исследования связанные с оценкой т.н. нейронных сетей мозга. Данная междисциплинарная задача подразумевает получение характеристик активности головного мозга на основе взаимодействия его отделов, формирующих сети для различных ситуаций функционирования. Анализ подобной активности помимо очевидной нейфрофизиологической компоненты требует как разработки новых, так и совершенствования уже существующих алгоритмов цифровой обработки сигналов (ЦОС), имеющих прикладную медицинскую направленность. Особенность этого сегмента ЦОС заключается в том, что помимо математической компоненты высоки требования к содержательной, физиологической интерпретации, полученных данных, позволяющих делать выводы относительно нейромеханизмов функционирования мозга.

Одним из методов анализа связи отделов мозга, завоевавших большую популярность в области нейроисследований является корреляционный анализ. Широкий набор подходов под этим названием включает не только классические подходы основанные на статистических коэффициентов корреляции, различные варианты кросс-спектрального анализа, но и целый ряд нелинейных решений. Тем не менее, междисциплинарный подход требует исследования ряда моделей

сигналов позволяющих детализировать представление и интерпретацию показателей корреляции применительно к задачам нейрофизиологии.

В свете сказанного выше актуальным представляется моделирование результатов статистического корреляционного анализа для типовых случаев взаимодействия отделов мозга, зарегистрированных электроэнцефалографическими методамии.

К таковым случаям следует отнести следующие:

1. Наличие в зарегистрированном сигнале аддитивного «шума» разной амплитуды и с различными спектральными характеристиками.

2. Наличие фазового сдвига между двумя сигналами.

3. Наличие инвертированных последовательностей мгновенных амплитуд в временном домене

1. Корреляция двух сигналов в условиях белого шума

Рассмотрим два гармонических сигнала с одинаковыми частотами, и пусть на сигналы на наложен белый шум различной амплитуды:

$f(t)=A_1\sin(\omega t)+N_1 s(t)$ и $g(t)=A_2\sin(\omega t)+N_2 s(t)$.

Здесь N_1 , N_2 – амплитуда шума, аддитивно накладывающегося на первый и второй сигнал соответственно.

Вычислим коэффициент корреляции C этих функций. По определению имеем:

$$C=\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i g_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} g_i^2}},$$

где N – число отсчетов, которое предполагающееся общим для f и g. Пользуясь свойствами белого шума $s(t)$ и переходя к дисперсиям заданных сигналов, получаем:

$$C=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(a_{1i}+N_{1i}\right)\left(a_{2i}+N_{2i}\right)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i^2}{N}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} g_i^2}{N}}N}=\frac{D(fg)}{\sqrt{D(f)D(g)}}.$$

Как известно, дисперсия суммы двух случайных величин выражается через сумму дисперсий каждой из них и удвоенный корреляционный момент: $D(A+S)=D(A)+D(S)+2K_{AS}$ [1]. В силу этого

$$C=\frac{D(fg)}{\sqrt{D(f)D(g)}}=\frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2+N_1^2}\sqrt{A_2^2+N_2^2}},$$

или

$$C=\frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2+N_1^2}\sqrt{A_2^2+N_2^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\eta_1^2\right)\left(1+\eta_2^2\right)}},$$

где A_1, A_2 – амплитуды сигналов, N_1, N_2 – амплитуды шума, η_1, η_2 – отношение шум/сигнал для *f* и *g* соответственно. Получено простое аналитическое выражение для коэффициента корреляции сигналов при наличии белого шума.

На рис. 1 представлены трехмерный график и контурная карта коэффициента корреляции.

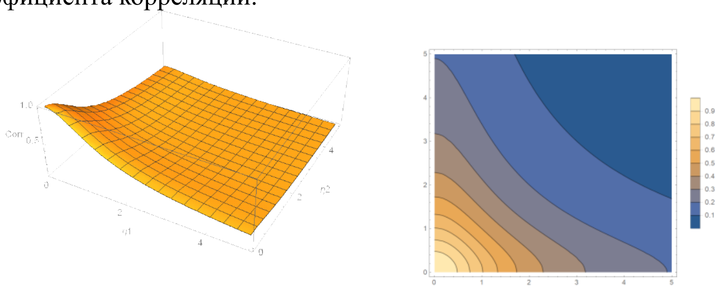

Рис. 1. Коэффициент корреляции гармонических сигналов в условиях наложенного белого шума

По горизонтальным осям отложено отношение шум/сигнал η_1, η_2 для двух сигналов. Как хорошо известно, чтобы проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины (при конкурирующей гипотезе $C\neq 0$), требуется вычислить значение критерия

$$T = C\sqrt{\frac{N-2}{1-C^2}}$$

и сравнить с критической точкой распределения Стьюдента с числом степеней свободы, равным N-2. Если выполняется неравенство $|T| > t_{cr}$, то нулевую гипотезу отвергают. Удобно использовать табличные данные (см. табл. 1) [2, 3].

Таблица 2

Критические значения корреляции Пирсона

N-2	p=0.05	p=0.01
5	0.75	0.87
6	0.71	0.83
7	0.67	0.80
8	0.63	0.77
9	0.60	0.74
10	0.58	0.71
20	0.42	0.54
50	0.27	0.35
100	0.20	0.25
200	0.14	0.18
300	0.11	0.15
400	0.10	0.13
500	0.09	0.12

Обратимся к задаче о коэффициенте корреляции гармонических сигналов произвольных частот. Рассмотрим два сигнала , заданных на некотором отрезке $[0, L]$:

$$f_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \delta_1),$$
$$f_2(t) = B\sin(\omega_2 t + \delta_2).$$

1. Общий случай

Коэффициент корреляции, как можно показать непосредственным вычислением, равен

$$r = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2}(\lambda - m_1 m_2).$$

Введены следующие обозначения:

$$m = \frac{\cos\delta - \cos(\omega L + \delta)}{\omega L},$$

$$\lambda = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2) - \sin((\omega_1 - \omega_2)L + \delta_1 - \delta_2)}{2L(\omega_2 - \omega_1)} +$$

$$+ \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2) - \sin((\omega_1 + \omega_2)L + \delta_1 + \delta_2)}{2L(\omega_2 + \omega_1)}.$$

Заметим, что в предельном случае, когда длина сигналов L достаточно велика и выполняется условие $|L(\omega_2 - \omega_1)|$ >>1, то $r \approx 0$.

2. Случай равных частот

В случае выполнения условия равенства частот $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, общая формула неприменима, и необходимо воспользоваться предельным переходом:

$$\lambda = \frac{1}{2}\cos(\delta_1 - \delta_2) + \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2) - \sin(2\omega L + \delta_1 + \delta_2)}{4\omega L}.$$

Если при этом ωL >>1, то $r \approx \cos(\delta_1 - \delta_2)$ (см. рис. Ошибка: источник перекрёстной ссылки не найден.).

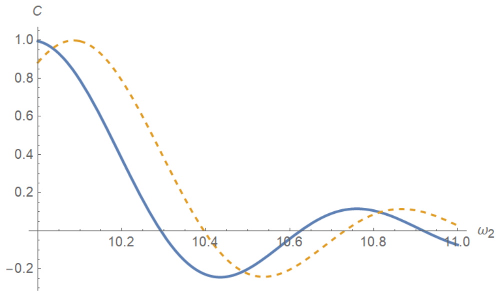

Рис. 1.

Коэффициент корреляции гармонических сигналов в зависимости от ω_2. Значения параметров равны $d_1=0$, $d_2=0.1$, $L=10$, $\omega_2=10$ (сплошная кривая), $\omega_2=10.1$ (пунктирная кривая)

Заключение

Задача построения и дальнейшего анализа нейронных сетей мозга требует разработки и совершенствования математических моделей «близости» электрических сигналов биомедицинской природы. Существенным требованием к такого рода математическим моделям является отражение характерных особенностей предметной области. Рассмотренные методы оценки корреляции модельных сигналов могут послужить основой для построения более совершенных нелинейных моделей взаимодействия отделов центральной нервной системы человека.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-29-01156_мк.

Литература

2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – 2-е изд., доп. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 399 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.

4. Гланц С. Медико-биологическая статистика. – М.: Практика, 1999. – 459 с.